

Chương 3.

PHƯƠNG PHÁP ĐƠN HÌNH VÀ CÁC THUẬT TOÁN CỦA NÓ

3.1. Cơ sở lí luận

Xét bài toán quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc

$$f(x) = c^T x \rightarrow \min \tag{1}$$

$$Ax = b \tag{2}$$

$$x \geq 0 \tag{3}$$

Với A là ma trận $m \times n$, $b \in \mathbb{R}^m$, c và $x \in \mathbb{R}^n$, trong đó, A có hạng là m ($m \leq n$). Bài toán quy hoạch là không suy biến, tất cả phương án cực biên của nó đều có số thành phần dương bằng m và $x^* = (x_{01}, x_{02}, \dots, x_{0n})$ là một phương án cực biên. Ký hiệu $J_0 = \{j : x_{0j} > 0\}$. Hệ véc tơ $\{A^j : j \in J_0\}$ độc lập tuyến tính, cho nên các véc tơ $A^i, i = 1, \dots, n$ đều biểu thị duy nhất qua cơ sở $\{A^j : j \in J_0\}$

$$A^i = \sum_{j \in J_0} x_{ij} A^j, \quad i = 1, \dots, n \tag{4}$$

Nếu gọi B là ma trận có các cột là $\{A^j, j \in J_0\}$ và đặt $x^i = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^m, j \in J_0$ thì $A^i = Bx^i$ hay $x^i = B^{-1}A^i, i = 1, \dots, n$.

Nếu đặt $x^0 = (x_j^0) \in \mathbb{R}^m, c_0 = (c_j^0) \in \mathbb{R}^m$ với $j \in J_0$ thì $f(x_0) = c_0^T x_0 = \sum_{j \in J_0} c_j^0 x_{0j}, Bx^0 = b$.

Định nghĩa 3.1.1 (Ước lượng). Ta gọi $\Delta_i = c^{0T} x^i - c_i, i = 1, \dots, n$ là *ước lượng* của biến x^i (hay của véc tơ A^i) ứng với cơ sở J_0 .

Định lý 3.1.2 (Dấu hiệu tối ưu). Nếu phương án cực biên x^* của quy hoạch tuyến tính có $\Delta_i \leq 0, i = 1, \dots, n$ thì x^* là phương án tối ưu của bài toán (1),(2),(3).

CHỨNG MINH.

Xét phương án bất kì $y = (y_i)$, ta có:

$$\begin{aligned} b &= \sum_{i=1}^n y_i \cdot A^i = \sum_{i=1}^n y_i \left(\sum_{j \in J_0} x_{ij} \cdot A^j \right) = \sum_{j \in J_0} \left(\sum_{i=1}^n x_{ij} y_i \right) A^j; \quad b = \sum_{j \in J_0} x_{0j} A^j \text{ (do (4))} \\ \Rightarrow x_{0j} &= \sum_{i=1}^n x_{ij} y_i, \quad j = 1, 2, \dots, n \end{aligned} \quad (5)$$

Từ $\Delta_i \leq 0 \ (\forall i)$ suy ra $c^{0T} x^i \leq c_i$. Do đó, ta được:

$$\begin{aligned} f(y) &= \sum_{i=1}^n c_i y_i \geq \sum_{i=1}^n (c^{0T} x^i) y_i \\ &= \sum_{i=1}^n \left(\sum_{j \in J_0} x_{ij} c_j \right) y_i \\ &= \sum_{j \in J_0} \left(\sum_{i=1}^n x_{ij} y_i \right) c_j \\ &= \sum_{j \in J_0} c_j \cdot x_{0j} = f(x_0) \end{aligned}$$

Vậy, x^0 là phương án tối ưu. □

Định lý 3.1.3 (Dấu hiệu hàm mục tiêu không bị chặn). Nếu phương án cực biên x^0 của quy hoạch tuyến tính mà có j sao cho $\Delta_j > 0$ và $x^j \leq 0$ thì bài toán (1),(2),(3) có hàm mục tiêu không bị chặn.

CHỨNG MINH.

Ta có:

$$A^i = \sum_{j \in J_0} x_{ij} A^j \quad (\forall i) \quad \text{(theo (4))}$$

Gọi

$$d_i = (d_{ij}) : d_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & j \in J_0 \\ -1 & j = i \\ 0 & j \notin J_0 \cup \{i\} \end{cases}$$

Xét véc tơ $x(\theta) = x^0 - \theta d_i (\theta \geq 0)$, ta có:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n x_j(\theta) A^j &= \sum_{j \in J_0} (x_{0j} - \theta x_{ij}) A^j + \theta A^i \\ &= \sum_{j \in J_0} x_{0j} A^j + \theta (A^i - \sum_{j \in J_0} x_{0j} A^j) = b + 0 = b. \end{aligned}$$

Và $x_{ji} \leq 0$ nên $d_i \leq 0$ mà $x_0 \geq 0$, cho nên $x(\theta) \geq 0$ với mọi $\theta \geq 0$.

Do đó, $x(\theta)$ là phương án của bài toán.

Mặt khác, ta thấy

$$\begin{aligned} f(x(\theta)) &= \sum_{j=1}^n c_j x_j(\theta) = \sum_{j \in J_0} c_j (x_{0j} - \theta x_{ij}) + \theta c_i \\ &= \sum_{j \in J_0} c_j x_{0j} + \theta \left((c_i) - \sum_{j \in J_0} c_j x_{ij} \right) \\ &= f(x_0) - \theta \Delta_i \rightarrow -\infty \quad \text{khi } \theta \rightarrow +\infty \quad \text{do } \Delta_i > 0. \end{aligned}$$

Do đó, hàm mục tiêu không bị chặn. □

Định lý 3.1.4 (Dấu hiệu xây dựng được phương án tối hơn). *Nếu phương án cực biên x^0 của quy hoạch tuyến tính tồn tại j sao cho $\Delta_j > 0$ và x_j có ít nhất một thành phần dương thì có thể xây dựng được phương án tốt hơn x^0 .*

CHỨNG MINH.

Xét véc tơ $x(\theta) = x_0 - \theta d_i (\theta > 0)$. với

$$d_i = (d_{ij}) : d_{ij} = \begin{cases} x_{ij} & j \in J_0 \\ -1 & j = i \\ 0 & j \notin J_0 \cup \{i\} \end{cases}$$

Theo trên, $Ax(\theta) = b$ và $f(x(\theta)) = f(x_0) - \theta \Delta_i < f(x_0)$ vì $\theta > 0$ và $\Delta_i > 0$.

Tuy nhiên, x_{ji} còn có j mà $x_{ji} > 0$ nên không bảo đảm cho $x(\theta) \geq 0$, với mọi $\theta > 0$.

Giá trị lớn nhất của θ để có $x(\theta) \geq 0$ là

$$\theta_0 = \min \left\{ \frac{x_{0j}}{x_{ij}} : x_{ij} > 0, j = 1, 2, \dots, m \right\} = \frac{x_{0r}}{x_{ir}}$$

Bằng cách đặt $\bar{x} = x(\theta_0)$ được phương án mới tốt hơn phương án đã cho. □

Nhận xét 3.1.5. A^r là véc tơ đưa ra ngoài cơ sở (J'_0), còn A^i là véc tơ (vào) cơ sở (J'_0). Việc chọn véc tơ vào cơ sở, thường theo quy tắc: $\max \{\Delta_i : i = 1, \dots, n\} = \Delta^v$ khi đó A^v là véc tơ vào cơ sở.

3.2. Thuật toán đơn hình

3.2.1 Thuật toán đơn hình

Thuật toán đơn hình để giải quy hoạch tuyến tính dạng chính tắc khi biết phương án cực biên x^* .

B1. Kiểm tra tối ưu.

Xác định: $c^0, x^i = B^{-1}A^i, i = 0, 1, \dots, n$. Tính $\Delta_i = c^{0T}x^i - c_i, i = 1, \dots, n$.

Nếu $\Delta_i > 0, \forall i$ thì x^* là phương án tối ưu. Thuật toán kết thúc. Ngược lại, chuyển sang B2.

B2. Kiểm tra hàm mục tiêu bài toán không bị chặn.

Nếu tồn tại $k : \Delta_k > 0$ và $x_k \leq 0$ thì bài toán có hàm mục tiêu không bị chặn.

Thuật toán kết thúc. Ngược lại, chuyển sang B3.

B3. Xây dựng phương án cực biên mới tốt hơn.

(i) Tìm véc tơ đưa vào cơ sở: Nếu $\max \Delta_i : i = 1, \dots, n = \Delta^v$ thì A^v được chọn đưa vào cơ sở.

(ii) Tìm véc tơ đưa ra cơ sở: Nếu $\min \left\{ \frac{x_{0i}}{x_{vi}} : x_{vi} > 0 \right\} = \frac{x_{0r}}{x_{v,r}}$ thì ta chọn A^r đưa ra cơ sở.

(iii) Xây dựng phương án cực biên mới (ứng với cơ sở vừa xác định mới). Bằng phép biến đổi dòng, người ta gọi là phép xoay, ta có phương án cực biên mới. Chuyển trở lại B1.

3.2.2 Bảng đơn hình

Thuật toán đơn hình thường được biểu diễn dưới dạng bảng. Mỗi bước ứng với một phương án cực biên là một bảng đơn hình.

Mỗi bảng đơn hình gồm $3 + n$ cột: cột c_0 , cột thứ hai ghi các véctơ trong cơ sở, cột thứ ba ghi x^0 . Dòng trên cùng ghi véctơ hệ số hàm mục tiêu c , dòng thứ hai ghi các véctơ x^j mà các thành phần của nó được ghi vào cột tương ứng. Dòng cuối cùng ghi $f = f(\bar{x})$ và các Δ_j , $j = 1, \dots, n$ mà các giá trị của nó được tính ngay trên bảng đơn hình này.

- $f(\bar{x}) = c^{0T}x^0$: Tích vô hướng của c^0 và x^0 .
- $\Delta_j = c^{0T}x^j - c_j$: Tích vô hướng của c^0 và x^j trừ đi c_j .

Sau khi tính các ước lượng ta tiến hành kiểm tra tính tối ưu, tính không bị chặn của hàm mục tiêu. Nếu thỏa một trong hai tính chất trên thì thuật toán kết thúc, còn không thì ta xây dựng phương án cực biên mới, tương ứng với bảng đơn hình mới.

Để xây dựng bảng đơn hình tiếp theo, ta lần lượt làm các việc sau:

- (I) Tìm cột xoay: Nếu phương án chưa thỏa tính tối ưu thì cột (v) ứng với véctơ đưa vào cơ sở A^v là cột xoay.
- (II) Tìm dòng xoay: Theo quy tắc tìm véctơ đưa ra cơ sở, nếu tìm được véctơ đưa ra là A^r thì dòng r là dòng xoay.
- (III) Thực hiện phép xoay: Ta có dòng A^r của ma trận A là dòng xoay, cột A^v của ma trận A là cột xoay, thì (x_{vr}) gọi là phần tử trục. Khi đó, ta xây dựng được bảng đơn hình mới bằng phép xoay.

Từ bảng đơn hình, ta lập bảng tiếp theo như sau:

- Trên dòng xoay thay A^r bởi A^v sau đó thực hiện phép xoay.
- Chia mỗi phần tử của dòng xoay cho phần tử của trục x_{vr} , như vậy số 1 xuất hiện tại vị trí trục.
- Để tính dòng i mới $i \in J \setminus \{r\}$, ta lấy dòng i cũ trừ đi tích của dòng xoay đã biến đổi với phần tử nằm giữa hai dòng đang tính và cột xoay (kể cả dòng ước lượng).

Ví dụ 3.2.3. Giải bài toán quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{aligned} f(x) = & \begin{matrix} x_1 & -x_2 & +2x_3 & -2x_4 & & -3x_6 \end{matrix} \rightarrow \min \\ & \begin{matrix} x_1 & & +x_3 & +x_4 & & -x_6 \end{matrix} = 2 \\ & \begin{matrix} & x_2 & & +x_4 & & +x_6 \end{matrix} = 12 \\ & \begin{matrix} & & 4x_3 & +2x_4 & +x_5 & +3x_6 \end{matrix} = 9 \\ & x_j \geq 0, \quad j = 1, \dots, 6 \end{aligned}$$

Giải

Bài toán có dạng chuẩn tắc.

C^0	Cơ		1	-1	2	-2	0	-3
	sở	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5	x^6
1	A^1	2	1	0	1	1	0	-1
-1	A^2	12	0	1	0	1	0	1
0	A^5	9	0	0	4	2	1	3
	f	-10	0	0	-1	(2)	0	1
	A^4	2	1	0	1	1	0	-1
	A^2	10	-1	1	-1	0	0	2
	A^5	5	-2	0	2	0	1	5
	f	-14	-2	0	-3	0	0	(3)
	A^4	3	0.6	0	1.4	1	0.2	0
	A^3	8	-0.2	1	-1.8	0	-0.4	0
	A^6	1	-0.4	0	0.4	0	0.2	1
	f	-17	-0.8	0	-42	0	-0.6	0

Ta thấy ngay phương án phương án cực biên $x^* = (2, 12, 0, 0, 9, 0)$ tương ứng với cơ sở $\{A^1, A^2, A^5\}$.

3.2.4 Trường hợp bài toán suy biến

Trường hợp bài toán suy biến, để tránh xoay vòng ta có thể sử dụng quy tắc **Blac** để chọn véc tơ vào cơ sở:

$$A^v \text{ là véc tơ vào nếu } v = \min\{i : \Delta_i > 0\}.$$

Tuy nhiên, xoay vòng hiển gặp.

3.2.5 Tìm phương án cực biên và cơ sở ban đầu

Thuật toán đơn hình gốc, áp dụng giải quy hoạch tuyến tính khi đưa dạng chính tắc, có sẵn cơ sở đơn vị và phương án cực biên. Tuy nhiên không phải lúc nào cũng gặp may như vậy. Trong trường hợp đó, ta phải tìm cách đưa về dạng có thể áp dụng thuật toán đơn hình mà tìm ra phương án cực biên xuất phát. Một trong những cách đó là dùng biến giả sẽ được trình bày dưới đây, có hai dạng: Hai pha và đánh thuế.

Thuật toán đơn hình hai pha

Bài toán gốc, bài toán bổ trợ

Giả sử cần giải bài toán (mà ta sẽ gọi là bài toán gốc):

$$\begin{cases} f(x) = c^T x \rightarrow \min \\ Ax = b \\ x \geq 0 \\ b \geq 0 \end{cases}$$

Tương ứng với bài toán gốc, ta lập bài toán bổ trợ sau:

$$\begin{cases} F(x, w) = x_{n+1} + x_{n+2} + \dots + x_{n+m} \rightarrow \min \\ Ax + w = b \\ x \geq 0; W \geq 0 \end{cases}$$

Trong đó, $w^T = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m})$ và x_{n+i} là các biến thêm vào, gọi là biến giả $i = 1, 2, \dots, m$. Các véc tơ A^{n+i} là các véc tơ đơn vị giả $i = 1, 2, \dots, m$.

Mối liên hệ bài toán gốc và bài toán bổ trợ

Gọi tập phương án bài toán gốc và bổ trợ là P và P' .

Ta thấy, $x \in P$ khi và chỉ khi $(x, 0) \in P'$; x là phương án cực biên bài toán gốc khi và chỉ khi $(x, 0)$ là phương án cực biên bài toán bổ trợ.

Xét bài toán bổ trợ.

+ $P' \neq \emptyset$ vì $(0, b) \in P'$ và $F(x, w) \geq 0$. Do đó, bài toán bổ trợ luôn có phương án tối ưu.

+ Bài toán bổ trợ có dạng chính tắc, có sẵn cơ sở đơn vị và phương án cực biên nên áp dụng phương pháp đơn hình gốc để giải. Tìm được phương án cực biên tối ưu là $(\bar{x}, \bar{w}) = (\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n, \bar{x}_{n+1}, \dots, \bar{x}_{n+m})$. Hãy xét hai trường hợp $\bar{w} = 0$ và $\bar{w} \neq 0$.

* $\bar{w} \neq 0$, suy ra, tồn tại $\bar{x}_{n+i} > 0$. Khi đó, bài toán gốc có tập phương án $P = \emptyset$.

Thật vậy, nếu tồn tại $x \in P$ thì $(x, 0) \in P'$ và $F(x, 0) = 0$ và tại $x_{n+i} > 0$ thì $F_{\min} = F(\bar{x}, \bar{w}) > 0 > F(x, 0)$ vô lí. Do đó, $P = \emptyset$.

* $\bar{w} = 0$. Tức là mọi biến giả bằng 0, khi đó, $\bar{x}$ là phương án cực biên của bài toán gốc.

Lúc $\bar{w} = 0$ thì $F_{\min} = F(\bar{x}, \bar{w}) = 0$ và $(\bar{x}, 0)$ là phương án cực biên của bài toán bổ trợ nên là phương án cực biên của bài toán gốc.

Thuật toán hai pha.

Pha 1. Tìm phương án cực biên cho bài toán gốc.

(i) Lập bài toán bổ trợ. Lập biến giả ứng cho những véc tơ đơn vị còn thiếu.

(ii) Giải bài toán bổ trợ, áp dụng phương pháp đơn hình để giải, tìm $F_{\min}$.

Nếu $F_{\min} \neq 0$ thì tập $P = \emptyset$. Dừng.

Nếu $F_{\min} = 0$ thì tìm được x^* là phương án cực biên cho bài toán gốc chuyển sang pha 2.

Pha 2. Tìm phương án cực biên tối ưu, áp dụng phương pháp đơn hình để giải.

Ví dụ 3.2.6. Giải quy hoạch tuyến tính

$$f(x) = 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_4 + 4x_5 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 5$$

Giải

Ta đưa vào hai biến giả là x_6, x_7 cho các ràng buộc thứ (2) và (3). Khi đó, ta được bài toán bổ trợ sau.

$$F(x) = x_6 + x_7 \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 + x_6 = 6 \\ x_2 - x_3 + x_4 - x_5 + x_7 = 1 \end{cases}$$
$$x_j \geq 0, j = 1, \dots, 7$$

Các bảng đơn hình giải bài toán trên là

C^0	Cơ sở	X^0	2	6	5	1	4
		0	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5
0	A1	3	1	-4	2	-5	9
1	A6	6	0	1	-3	4	-5
1	A7	1	0	1	-1	1	-1
	F	7	0	2	-4	5	-6
	A1	8	1	1	-3	0	4
	A6	2	0	-3	1	0	-1
	A4	1	0	1	-1	1	-1
	F	2	0	-3	1	0	-1
2	A1	14	1	-8	0	0	1
-5	A3	2	0	-3	1	0	-1
1	A4	3	0	-2	0	1	-2
	F	0	0	0	0	0	0
	f	21	0	-9	0	0	1
	A1	14	1	-8	0	0	1
	A3	16	1	-11	1	0	0
	A4	31	2	-18	0	1	0
	f	7	-1	-1	0	0	0

Vậy, phương án tối ưu $x = (14, 0, 16, 31, 0)$ và $f_{\min} = 7$.

Nhận xét 3.2.7.

- + Nhập số liệu lúc đầu hệ số x_i của F là 0 nếu nó là biến, còn biến giả là 1.
- + **Pha 1.** Kết thúc sau 3 bước lặp, dấu hiệu tối ưu bài toán bổ trợ xuất hiện, trong cơ sở không có biến giả. Ta tìm được phương án cực biên cho bài toán gốc.
- + **Pha 2.** Ta phải tính ước lượng tương ứng phương án tìm được.

Ví dụ 3.2.8. Giải quy hoạch tuyến tính.

$$\begin{aligned} f(x) &= 7x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \min \\ &\begin{cases} -6x_1 & +4x_2 & +5x_3 \geq -20 \\ x_1 & +2x_2 & x_3 = 8 \\ 3x_1 & +2x_2 & -x_3 \leq -8 \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3 \end{aligned}$$

Giải

Ta chọn biến bù x_4, x_5 ta đưa bài toán dạng chính tắc với $b \geq 0$ như sau.

$$\begin{aligned} f(x) &= 7x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \min \\ &\begin{cases} 6x_1 & -4x_2 & -5x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 & +2x_2 & x_3 = 8 \\ -3x_1 & -2x_2 & +x_3 - x_5 = 8 \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5 \end{aligned}$$

Tiếp tục chọn biến giả x_6, x_7 , ta có bài toán bổ trợ sau.

$$\begin{aligned} F(x) &= x_6 + x_7 \rightarrow \min \\ &\begin{cases} 6x_1 & -4x_2 & -5x_3 + x_4 = 20 \\ x_1 & +2x_2 & x_3 + x_6 = 8 \\ -3x_1 & -2x_2 & +x_3 - x_5 + x_7 = 8 \end{cases} \\ x_j &\geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

Ta có bảng đơn hình sau:

C_0	Cơ	0	7	1	-4	0	0
	sở	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
0	A^4	20	6	-4	-5	1	0
1	A^6	8	1	2	1	0	0
1	A^7	8	-3	2	1	0	-1
	F	16	-2	4	2	0	-1
0	A^4	36	8	0	-3	1	1
1	A^2	4	0.5	1	0.5	0	0
0	A^7	0	-4	0	0	0	-1
	F	0	-4	0	0	0	-1
	f	4	-6.5	0	4.5	0	0
	A^4	60	11	6	0	1	1
	A^3	8	1	2	1	0	0
	A^7	0	-4	0	0	0	-1
	f	-32	-11	-9	0	0	0

Vậy, phương án tối ưu $x = (0, 0, 8)$ và $f_{\min} = -32$.

Nhận xét 3.2.9. Bước 2 kết thúc pha 1, tuy cơ sở còn biến giả nhưng giá trị bằng 0. Do đó, ta tìm được phương án cực biên suy biến cho bài toán gốc.

Thuật toán đánh thuế (Thuật toán bài toán(M)).

Bài toán M-lớn

Ta có thể kết hợp hai pha của phương pháp hai pha thành một nhờ phương pháp đánh thuế vào biến giả. Từ bài toán xuất phát dạng chính tắc, ta lập bài toán M-lớn như sau.

$$F(x, w) = c^T x + M(x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}) \rightarrow \min$$
$$\begin{cases} Ax + w = 0 \\ x \geq 0, w \geq 0 \end{cases}$$

Trong đó $w = (x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}), x_{n+1}, x_{n+2}, \dots, x_{n+m}$ gọi là các biến giả. M là số dương rất lớn (lớn hơn bất cứ số nào cần so sánh). Ứng với mỗi biến giả thì có hệ số hàm mục tiêu của nó là M , như là sự đánh thuế vào biến giả.

Mối liên hệ bài toán gốc và bài toán M-lớn

Định lý 3.2.10 (Quan hệ giữa bài toán gốc và M -lớn). *Xem bài toán gốc và bài toán M -lớn tương ứng thì*

- (a) *Nếu bài toán gốc có phương án thì mọi phương án cực biên tối ưu của bài toán M -lớn phải có $w = 0$.*
- (a) *Nếu bài toán gốc có phương án tối ưu x thì bài toán M -lớn phải có ít phương án tối ưu $(x, 0)$ và ngược lại.*

Nhận xét 3.2.11. Như vậy, để giải bài toán gốc, ta có thể giải bài toán M -lớn tương ứng. Khi bài toán M -lớn không có phương án hoặc có phương án cực biên tối ưu (x, w) .

Với $w \neq 0$ thì bài toán gốc không có phương án nào cả; nếu nó có phương án tối ưu dạng $(x, 0)$ thì x là phương án tối ưu bài toán gốc.

Thuật toán đánh thuế

- (i) Lập bài toán M -lớn. Lập biến giả ứng cho những véc tơ đơn vị còn thiếu. Lập bảng đơn hình xuất pháp: Các ước lượng có dạng $\Delta_i = \alpha_i + \beta_i M$ nên tách ra hai dòng. Dòng trên là α_i , dòng dưới là β_i . Ta có thể bỏ cột biến giả không lập.

- (ii) Áp dụng phương pháp đơn hình giải.

Khi giải, so sánh các ước lượng $\Delta_i = \alpha_i + \beta_i M$, ta áp dụng theo quy tắc:

- (a) $\Delta_i < 0$ nếu $\beta_i < 0$ hoặc ($\beta_i = 0$ và $\alpha_i < 0$).
- (b) $\Delta_i > 0$ nếu $\beta_i > 0$ hoặc ($\beta_i = 0$ và $\alpha_i > 0$).

(c) $\Delta_i < \Delta_j$ nếu $\beta_i < \beta_j$ hoặc ($\beta_i = \beta_j$ và $\alpha_i < \alpha_j$).

Dấu hiệu bài toán gốc có tập phương án rỗng là phương án tối ưu của bài toán M -lớn là (x, w) mà $w \neq 0$ hoặc $F_{\min}(x, w) == \alpha_0 + \beta_0 M$ mà $\beta_0 \neq 0$.

Ví dụ 3.2.12. Giải quy hoạch tuyến tính sau:

$$\begin{aligned} f(x) &= -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 = 2 \\ 2x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +3x_4 = 9 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 = 6 \end{cases} \\ x_j &\geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4 \end{aligned}$$

Giải

Ta chọn biến giả x_5, x_6, x_7 , ta có bài toán M-lớn tương ứng sau

$$\begin{aligned} F(x) &= -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 + M(x_5 + x_6 + x_7) \rightarrow \min \\ \begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 + x_5 = 2 \\ 2x_1 & -6x_2 & +3x_3 & +3x_4 + x_6 = 9 \\ x_1 & -x_2 & +x_3 & -x_4 + x_7 = 6 \end{cases} \\ x_j &\geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 \end{aligned}$$

Ta có các bảng đơn hình.

C_0	Cơ	0	-3	1	3	-1
	sở	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4
M	A^5	2	1	2	-1	1
M	A^6	9	2	-6	3	3
M	A^7	6	1	-1	1	-1
	F	0	3	-1	-3	1
		17	4	-5	3	3
	A^1	2	1	2	-1	1
	A^6	5	0	-10	5	1
	A^7	4	0	-9	2	0

	F	-6		0	-7 0	-2
		9	0	-13	7	-1
	A^1	3	1	0	0	1.2
	A^3	1	0	-	2 1	0.2
	A^7	2	0	1	0	-2.4
	F	-6	0	-7	0	-2
		2	0	1	0	-2.4
	A^1	3	1	0	0	1.2
	A^3	5	0	0	1	-4.6
	A^2	2	0	1	0	-2.4
	F	8	0	0	0	-18.8
		0	0	0	0	0

Vậy, nghiệm tối ưu bài toán $x = (3, 2, 5, 0)$ và $f_{\min} = 8$.

Ví dụ 3.2.13. Giải quy hoạch tuyến tính

$$\begin{aligned}
 f(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min \\
 \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 \geqslant 1 \end{cases} \\
 x_j &\geqslant 0, j = 1, 2, 3
 \end{aligned}$$

Giải

Gọi hai biến bù x_4, x_5 , đưa bài toán về dạng chính tắc và x_6 là biến giả, ta có bài toán M -lớn sau.

$$\begin{aligned}
 F(x) &= 2x_1 - 2x_2 + 3x_3 + Mx_6 \rightarrow \min \\
 \begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 - x_2 - 3x_3 - x_5 + x_6 = 1 \end{cases} \\
 x_j &\geqslant 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6
 \end{aligned}$$

Ta có các bảng đơn hình sau:

C_0	Cơ	0	2	-2	3	0	0
	sở	x^0	x^1	x^2	x^3	x^4	x^5
0	A^4	1	2	2	-1	1	0
M	A^6	1	1	-1	-3	0	-1
	F	0	-2	2	-3	0	0
		1	1	-1	-3	0	-1
	A^1	0.5	1	1	-0.5	0.5	0
	A^6	0.5	0	-2	-2.5	-0.5	-1
	F	1	0	4	-4	1	0
		0.5	0	-2	-2.5	-0.5	-1

Vậy, bài toán đã cho có tập phương án rỗng. Do bài toán M -lớn có phương án tối ưu $x = (0.5, 0, 0, 0, 0, 0.5)$ có biến giả $x_6 = 0.5 > 0$.

3.3. Bài tập chương 3

Bài 3.1. Cho bài toán quy hoạch tuyến tính:

$$3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \rightarrow \min \tag{3.3.1}$$

$$\left\{ \begin{array}{llll} x_1 & +7x_3 & -3x_4 & = 7 \\ & x_2 & -2x_3 & +x_4 = 1 \\ & & 3x_3 & -x_4 +x_5 = 16 \end{array} \right. \quad x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5. \tag{3.3.2}$$

- (a) Tìm phương án cực biên x ứng với cơ sở A^3, A^4, A^5 .
- (b) Đối với phương án cực biên x hãy tính các ước lượng $\Delta_j, j = 1, 2, 3, 4, 5$. Từ đó suy ra tính tối ưu của x .

Bài 3.2. Giải các bài toán quy hoạch sau bằng thuật toán đơn hình (tên gọi chung cho thuật toán đơn hình gốc, thuật toán hai pha, thuật toán bài toán M và cả thuật toán đơn hình đối ngẫu)

$$\begin{aligned}
 \text{(a)} \quad & f(x) = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 - 2x_4 \rightarrow \min \\
 & \begin{cases} x_1 & +7x_3 & -3x_4 & & = 7 \\ & x_2 & -2x_3 & +x_4 & = 1 \\ & & 3x_3 & -x_4 & +x_5 = 16 \end{cases} \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(b)} \quad & f(x) = 3x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 7x_4 \rightarrow \max \\
 & \begin{cases} 3x_1 & +2x_2 & +x_3 & +3x_4 & +2x_5 \leq 15 \\ & x_1 & +2x_2 & +x_3 & +4x_4 & +x_5 \leq 19 \end{cases} \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(c)} \quad & f(x) = x_1 - 2x_2 \rightarrow \min \\
 & \begin{cases} -x_1 & +x_2 \leq 2 \\ & x_1 & -2x_2 \leq 3 \end{cases} \\
 & x_1 \geq 0, x_2 \geq 0.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(d)} \quad & f(x) = 2x_1 + 4x_2 + x_3 + x_4 \rightarrow \max \\
 & \begin{cases} x_1 & +3x_2 & & +x_4 \leq 4 \\ 2x_1 & +x_2 & & \leq 3 \\ & x_2 & +4x_3 & +x_4 \leq 3 \end{cases} \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(e)} \quad & f(x) = -3x_2 + 2x_4 + 2x_6 \rightarrow \min \\
 & \begin{cases} x_1 & & +5x_4 & +x_5 & +2x_6 = 10 \\ & x_2 & & -x_4 & +x_5 = 3 \\ & & x_3 & -5x_4 & -3x_5 & +8x_6 = 1 \end{cases} \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{(f)} \quad & f(x) = -x_1 + x_2 - x_3 - x_4 + 2x_5 + 2x_6 \rightarrow \min \\
 & \begin{cases} x_1 & +x_2 & +x_3 & +x_4 & & = 10 \\ & x_2 & & -x_3 & +2x_4 & +x_5 = 0 \\ & & 2x_2 & +x_3 & +8x_4 & +x_6 = 30 \end{cases} \\
 & x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.
 \end{aligned}$$

$$\text{(g)} \quad f(x) = x_1 + x_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 & & -x_4 & & -2x_6 & = 5 \\ & x_2 & & +2x_4 & -3x_5 & x_6 & = 3 \\ & & +x_3 & +2x_4 & -5x_5 & +6x_6 & = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

(h) $f(x) = x_2 - 3x_4 + x_5 + 6x_6 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 & & -x_4 & & -2x_6 & = 7 \\ & x_2 & +x_3 & & 4x_5 & 7x_6 & = 9 \\ & & x_2 & & & 3x_6 & = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6.$$

Xuất phát từ phương án cực biên $\bar{x} = (1, 4, 3, 0, 0, 0)$

(i) $f(x) = -5x_1 + x_2 - 2x_3 + 5x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +2x_3 & & \leq 7 \\ 2x_1 & +x_2 & +3x_3 & -3x_4 & \leq 9 \\ 3x_1 & -2x_2 & +x_3 & +x_4 & \leq 30 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

(j) $f(x) = -11x_1 + 3x_2 - x_3 + 11x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 & -x_2 & +4x_3 & -3x_4 & \leq 5 \\ x_1 & & -2x_3 & -2x_4 & \leq 4 \\ 2x_1 & -x_2 & -x_3 & +x_4 & \leq 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Bài 3.3. Giải và biện luận bài toán sau theo tham số t :

$$f(x) = 2x_1 + tx_2 + x_3 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 6x_1 & +8x_2 & -2x_3 & \leq 1 \\ 2x_1 & -8x_2 & +x_3 & \leq 3 \\ -x_1 & -5x_2 & +x_3 & \leq 2 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

Bài 3.4. Giải bài toán sau xuất phát từ phương án cực biên $\bar{x} = (1, 2, 0, 3)$

$$f(x) = 2x_1 - x_2 - 15x_3 + 4x_4 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & x_4 & = 8 \\ -x_1 & +x_2 & +x_3 & -x_4 & = -2 \\ 3x_1 & -x_2 & +4x_3 & +x_4 & = 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

Bài 3.5. Cho bài toán quy hoạch

$$f(x) = -x_1 + x_2 - 2x_3 - 3x_4 + 4x_5 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} 3x_2 & -4x_4 & +3x_5 & \leq 34 \\ x_1 & +4x_2 & & +x_4 & -2x_5 & = 24 \\ 7x_2 & & +2x_4 & -3x_5 & \leq 12 \\ \frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & -\frac{1}{2}x_5 & = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

(a) Hãy giải bài toán trên bằng thuật toán đơn hình.

(b) Hãy giải bài toán đã cho khi có thêm ràng buộc $f(x) \geq -106$.

Bài 3.6. Cho bài toán với tham số t

$$f(x) = -x_1 + x_3 - tx_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} -x_1 & +x_2 & 12x_3 & -2tx_4 & +4x_5 & = 9 \\ 2x_1 & & +8x_3 & +(1-t)x_4 & +2x_5 & = 14 \\ x_1 & & & +(t-1)x_4 & -3x_5 & = 4 \\ \frac{1}{2}x_2 & +x_3 & & & -\frac{1}{2}x_5 & = 5 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

(a) Biết rằng $\bar{x}$ là một phương án cực biên ứng với cơ sở A^1, A^2, A^5 . Hãy lập bảng đơn hình ứng với $\bar{x}$.

(b) Từ bảng đơn hình vừa lập được, hãy tìm tập tất cả các giá trị của t sao cho $\bar{x}$ là phương án tối ưu.

(c) Giải bài toán đã cho khi $t = 1$ và $t = 3$.

Bài 3.7. Giải các bài toán quy hoạch tuyến tính sau bằng thuật toán hai pha

(a) $f(x) = 2x_1 + 6x_2 - 5x_3 + x_4 + 4x_5 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 - 5x_4 + 9x_5 = 3 \\ \quad \quad x_2 - 3x_3 + 4x_4 - 5x_5 = 6 \\ \quad \quad \quad x_2 - x_3 + x_4 - x_5 = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

(b) $f(x) = 7x_1 + x_2 - 4x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} -6x_1 + 4x_2 + 5x_3 \geq -20 \\ \quad x_1 + 2x_2 + x_3 = 8 \\ \quad 3x_1 - 2x_2 - x_3 \leq -8 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

(c) $f(x) = -x_1 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 \quad \quad -x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 4x_3 - 2x_4 = 2 \\ 3x_1 + x_2 + 3x_3 \quad \quad = 3 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$

(d) $f(x) = x_1 - 2x_2 + 3x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 = 1 \\ \quad x_1 - x_2 + 3x_3 \leq 4 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$$

(e) $f(x) = 2x_1 + x_2 - x_3 - 4x_4 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 2x_1 + 2x_2 - x_3 \leq 1 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 \leq -2 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 \leq 3 \\ x_3 \geq 0 \end{cases}$$

Bài 3.8. Giải các bài toán sau bằng thuật toán M :

(a) $f(x) = 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 \leq 6 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

(b) $f(x) = x_1 + x_2 - x_3 \rightarrow \min$

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 2 \\ 4x_1 - x_2 + 2x_3 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - 4x_3 \leq 4 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3.$

(c) $f(x) = x_1 - 3x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 4x_1 + 3x_2 \leq 12 \\ -x_1 + x_2 \leq 5 \\ x_1 + 5x_2 \leq 6 \end{cases}$$

$x_1 \geq 0.$

(d) $f(x) = -3x_1 + 2x_2 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} x_1 - tx_2 \leq 1 \\ -x_1 + x_2 \geq 1 \end{cases}$$

$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4$

(Biện luận theo tham số $t > 0$).

(e) $f(x) = 5x_1 - x_2 + x_3 - 10x_4 + 7x_5 \rightarrow \max$

$$\begin{cases} 3x_1 - x_2 - x_3 = 4 \\ x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + x_5 = 7 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{(f)} \quad f(x) = x_4 - x_5 \rightarrow \max$$

$$\begin{cases} 2x_2 & -x_3 & -x_4 & x_5 & \geq 0 \\ 2x_1 & & +2x_3 & -x_4 & +x_5 \geq 0 \\ x_1 & -2x_2 & & -x_4 & +x_5 \geq 0 \\ x_1 & +x_2 & +x_3 & & = 1 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4, 5.$$

$$\text{(g)} \quad f(x) = -3x_1 + x_2 + 3x_3 - x_4 \rightarrow \min$$

$$\begin{cases} x_1 & +2x_2 & -x_3 & +x_4 & = 0 \\ 2x_1 & -2x_2 & +3x_3 & +3x_4 & = 9 \\ x_1 & -x_2 & +2x_3 & -x_4 & = 6 \end{cases}$$

$$x_j \geq 0, j = 1, 2, 3, 4.$$